E.N.S.I. DE CHIMIE groupe Centre 1983

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME PARTIE

Durée : 2 heures

Option P'

N.B. — *Les questions* II *et* III (excepté III-3), *sont indépendantes de la question* I

Notations générales :

On désigne par :

R l'ensemble des nombres réels;

R_+ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls;

N l'ensemble des entiers;

N^* l'ensemble des entiers strictement positifs;

N_q^* l'ensemble des entiers p tels que $1 \leqslant p \leqslant q$;

I l'intervalle réel $[x_0 - a,\ x_0 + a]$ où x_0 désigne un élément de R et a un réel strictement positif;

E l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle x définies dans I.

PREMIÈRE QUESTION

On désigne par P un polynôme réel à coefficients réels de degré n $(n \in N^*)$ défini par :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (a_0 \text{ non nul},\ x \in R)$$

Soit α un nombre réel. On définit les nombres b_i pour $0 \leqslant i \leqslant n$ par les relations :

$$(1) \qquad \begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_i &= \alpha\, b_{i-1} + a_i \qquad (i \in N_n^*) \end{aligned}$$

1° Montrer que :

$$(2) \qquad b_n = P(\alpha)$$

2° Soit Q le polynôme de degré $n - 1$ défini par :

$$(3) \qquad Q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1} \qquad (x \in R)$$

Démontrer que :

$$(4) \qquad P(x) = (x - \alpha)\, Q(x) + b_n$$

On suppose de plus que les b_i $(i \in N_n^*)$ sont des éléments de R_+, et α et b_0 strictement positifs. Montrer que toute racine réelle de P est inférieure ou égale à α.

3° Soit T le polynôme défini par la relation :

$$(5) \qquad T(x) = -x^4 + 6x^2 + 4x - 2 \qquad (x \in R)$$

Après avoir admis que T possède quatre racines réelles, montrer, en utilisant les résultats précédents que toutes ces racines appartiennent à l'intervalle $]-3, 3[$.

Séparer ces racines, c'est-à-dire donner quatre intervalles contenant chacun une racine de T, et une seulement.

. . . / . . .

DEUXIÈME QUESTION

Soit f une fonction de E.

On dit que f est une fonction contractante s'il existe une constante réelle k $(0 < k < 1)$ telle que, quels que soient x et x' dans I on ait :

(6) $$|f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$$

On désigne par E' le sous-ensemble des fonctions de E qui sont contractantes.

1° Démontrer que toute fonction de E' est continue dans I.

2° Soit f une fonction de E admettant une dérivée première f' continue dans I. On suppose qu'il existe un réel k $(0 < k < 1)$ tel que, quel que soit x de I on ait :

(7) $$|f'(x)| \leqslant k$$

Montrer alors que $f \in E'$.

3° On suppose que l'équation $x = f(x)$ $(f \in E')$ admet une racine réelle ξ dans I. Démontrer que cette racine est unique.

TROISIÈME QUESTION

Soit f une fonction de E'.

On suppose de plus que :

(8) $$|f(x_0) - x_0| \leqslant (1 - k)\,a$$

1° Montrer que f définit une application de I dans I.

2° On considère la suite récurrente $\{u_n\}$ définie par les relations :

(9) $$\begin{aligned} u_0 &= x_0 \\ u_n &= f(u_{n-1}) \qquad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

2° 1. Soient m et p deux éléments de N tels que $p \geqslant m$. Montrer alors que :

(10) $$|u_{m+1} - u_m| \leqslant a\,k^m(1 - k)$$

(11) $$|u_p - u_m| \leqslant a\,(k^m - k^p)$$

En déduire que la suite $\{u_n\}$ converge dans I vers une limite $l \in I$ dont on précisera les qualités.

2° 2. On pose $\varepsilon_n = |l - u_n|$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

Démontrer que :

(12) $$\varepsilon_n \leqslant \frac{k}{1 - k}\,|u_n - u_{n-1}|$$

3° On désigne par g une fonction de E admettant sur I une dérivée première g' continue.

Soient :

(13) $$M = \sup_{x \in I} g'(x)$$

(14) $$m = \inf_{x \in I} g'(x)$$

. . . / . . .

On suppose :

(15) $M > m > 0$ et l'on pose :

(16) $f(x) = x - \lambda g(x) \quad (\lambda \in R)$

3° 1. Montrer qu'il existe une valeur unique λ_0 de λ telle que :

(17) $$\forall x \in I \quad | f'(x) | \leqslant \frac{M - m}{M + m}$$

3° 2. En déduire que si $| g(x_0) | \leqslant am$ alors la suite récurrente $\{ v_n \}$ définie par les relations :

(18) $$v_0 = x_0$$
$$v_n = v_{n-1} - \lambda_0 g(v_{n-1}) \quad (n \in N^*)$$

converge dans I vers une limite $l' \in I$ dont on précisera les qualités.

Application : Soit T le polynôme défini par la relation (5). On désigne par ξ la racine réelle comprise entre 0 et 1. *Après avoir justifié toutes les hypothèses* montrer que l'algorithme défini par les relations (18) permet de déterminer une approximation ξ' de ξ avec une précision $p = | \xi' - \xi | \leqslant \varepsilon$ où ε désigne un réel fixé à l'avance.

Faire l'application numérique pour $\varepsilon = 10^{-6}$.

FIN